CANTABRIA 2018

OPCIÓN 1 · EJERCICIO 2

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

Con correcciones de Alberto Aguayo Díaz (aguayod.alberto@gmail.com).

Desde la Luna se lanza contra la Tierra un bloque de piedra de masa $m = 10^6$ kg.

(a) ¿Cuál es la distancia de la Tierra a partir de la cual es más fuerte la atracción terrestre que la lunar?

(b) ¿Cuál es la energía potencial del bloque en la superficie de la Luna?

(c) ¿Qué velocidad mínima hay que proporcionar al bloque en la Luna para que llegue a la Tierra?

Distancia Tierra-Luna (entre centros): $d = 3.84 \times 10^8$ m. $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg; $R_T = 6.37 \times 10^6$ m; $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg; $R_L = 1.735 \times 10^6$ m; $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m kg^{-2}.

Solución

(a) La piedra se ve sometida tanto a la atracción terrestre, $\vec{F}_T$, como a la lunar, $\vec{F}_L$, ambas con la misma dirección pero de sentidos opuestos, y dadas por la LEY de GRAVITACIÓN UNIVERSAL:

$$\vec{F}_T = G\frac{M_T m}{(d-x)^2}\,\hat{r}$$
$$\vec{F}_L = -G\frac{M_L m}{x^2}\,\hat{r}$$

donde x es la distancia del bloque al centro de la Luna[1] y $\hat{r}$ es un vector unitario con origen en la Luna y dirección hacia la Tierra. Nos piden x^* tal que $F_T = F_L$ (en módulo):

$$\cancel{G}\frac{M_T \cancel{m}}{(d-x)^2} = \cancel{G}\frac{M_L \cancel{m}}{x^2}$$
$$x^2 M_T = (d-x)^2 M_L$$
$$x^2 M_T = \left(d^2 - 2xd + x^2\right) M_L$$

donde llegamos a la ECUACIÓN de SEGUNDO GRADO:

$$(M_T - M_L)x^2 + 2dM_L x - d^2 M_L = 0$$

Resolviendo obtenemos DOS SOLUCIONES para x:

$$x^* = \begin{cases} -4.7925 \times 10^7 \text{ m} \\ 3.8352 \times 10^7 \text{ m} \end{cases}$$

donde nos quedamos con la segunda solución ya que la primera es negativa. La distancia medida desde la Tierra sería:

$$\boxed{d - x^* = 3.457 \times 10^8 \text{ m}}$$

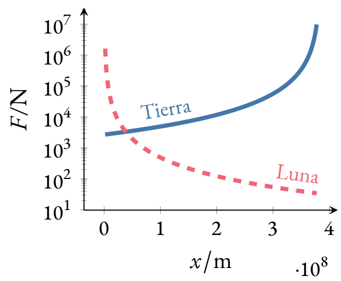

Figura 1: Fuerzas de atracción de la Tierra y de la Luna en función de la distancia x medida desde el centro de la Luna. Ambas curvas se cortan en $x^* = 3.8352 \times 10^7$ m.

[1] A pesar de que nos piden la distancia medida desde la Tierra, parece más intuitivo plantear el problema midiendo las distancias desde la Luna, pues es desde donde se lanza el bloque.

(b) La ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA del bloque tiene dos contribuciones (ver figura 2), una de la Tierra, U_T, y otra de la Luna, U_L:

$$U = U_T + U_L,$$

dadas por las expresiones:

$$U_T = -\frac{GM_T m}{d - x}$$
$$U_L = -\frac{GM_L m}{x}$$

donde x de nuevo es la distancia del bloque al centro de la Luna.

En la superficie de la Luna, $x = R_L$:

$$U(x = R_L) = -\frac{GM_T m}{d - R_L} - \frac{GM_L m}{R_L} = -Gm\left(\frac{M_T}{d - R_L} + \frac{M_L}{R_L}\right) = -3.867 \times 10^{12}\ \mathrm{J}$$

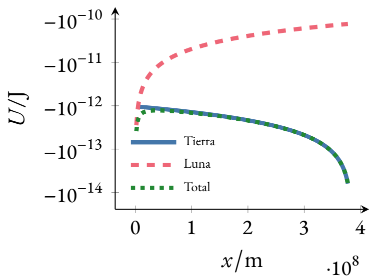

Figura 2: Contribuciones de la Tierra y de la Luna a la energía potencial gravitatoria total del bloque en función de la distancia x medida desde el centro de la Luna.

(c) Como nos piden la VELOCIDAD MÍNIMA para que llegue a la superficie de la Tierra, basta con impulsarlo hasta el punto donde se igualan ambas atracciones, calculado en a), suponiendo que llega a ese punto parado[2]. Como las únicas fuerzas a las que está sometido el bloque son las fuerzas de atracción gravitatoria por parte de la Tierra y de la Luna, y éstas son CONSERVATIVAS, podemos aplicar la CONSERVACIÓN de la ENERGÍA MECÁNICA[3]:

$$E_A = E_B$$
$$K_A + U_A = U_B$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 - \frac{GM_T\cancel{m}}{d - R_L} - \frac{GM_L\cancel{m}}{R_L} = -\frac{GM_T\cancel{m}}{d - x^*} - \frac{GM_L\cancel{m}}{x^*}$$

Despejamos v_A:

$$v_A = \sqrt{2G\left(\frac{M_T}{d - R_L} + \frac{M_L}{R_L} - \frac{M_T}{d - x^*} - \frac{M_L}{x^*}\right)} = 2.275 \times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

La figura 4 muestra la variación de la velocidad del bloque a medida que se aleja de la superficie de la Luna. Se observa que el bloque se frena hasta $x^* = 3.8352 \times 10^7$ m, donde su velocidad es nula y entonces comienza a ser acelerado de nuevo por la atracción de la Tierra.

[2] A partir de ese momento la atracción terrestre vence a la lunar y por tanto el bloque será acelerado hacia la Tierra.

[3] Sea A la superficie de la Luna y B el punto donde las atracciones terrestre y lunar se igualan, es decir, $x^* = 3.8352 \times 10^7$ m. En A el bloque tiene energía cinética K_A y energía potencial gravitatoria U_A, mientras que en B solo tiene energía potencial gravitatoria U_B.

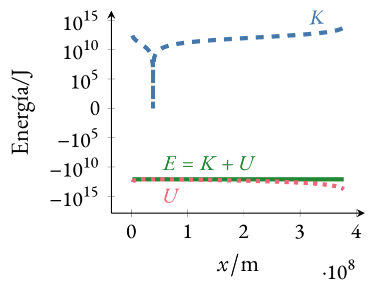

Figura 3: Energías cinética, K, potencial gravitatoria, U, y total, E, del bloque en función de la distancia x medida desde el centro de la Luna.

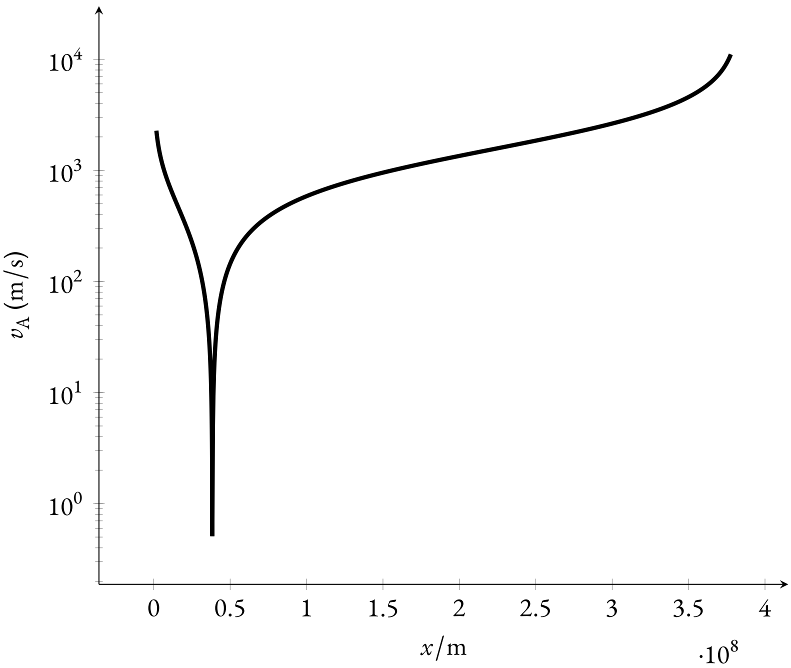

Figura 4: Velocidad del bloque en función de la distancia x medida desde el centro de la Luna.