ASTURIAS 2018

EJERCICIO 4

R. ALCARAZ DE LA OSA · J. SÁNCHEZ MAZÓN

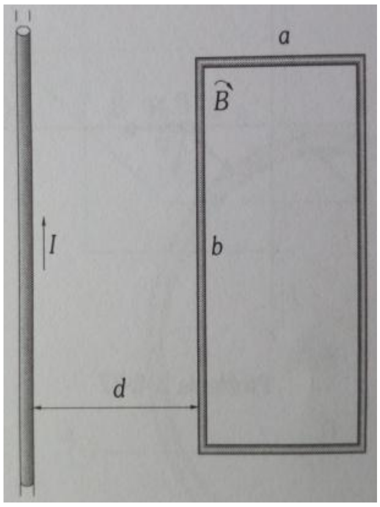
A. Determine razonadamente la expresión del flujo magnético que atraviesa el circuito rectangular de la figura, y calcúlela teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente que circula por la línea rectilínea e indefinida es $I = 6\,\mathrm{A}$, $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 10\,\mathrm{cm}$ y $d = 5\,\mathrm{cm}$.

Calcule la fuerza electromotriz inducida en el circuito anterior en los siguientes casos independientes:

B. Si el circuito rectangular se mueve separándose perpendicularmente de la línea de corriente rectilínea, con una velocidad uniforme de $2\,\mathrm{m/s}$, en el instante en que la distancia d sea de $20\,\mathrm{cm}$.

C. Si por la línea rectilínea circula una corriente alterna de intensidad $I = I_0 \sin \omega t$, siendo la frecuencia $50\,\mathrm{Hz}$ y la intensidad máxima $10\,\mathrm{A}$.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$.



Solución

A. El flujo magnético, Φ, se calcula en general como la integral de superficie:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S B \mathrm{d}S \cos\theta, \tag{1}$$

donde $\vec{B}$ es el vector campo magnético y $\mathrm{d}\vec{S}$ el diferencial de superficie.

Calculamos el campo magnético $\vec{B}$ utilizando la LEY DE AMPÈRE[1]:

$$\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B 2\pi x = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

siendo x la distancia medida en perpendicular desde el conductor.

Tomando $\mathrm{d}S = b\,\mathrm{d}x$ podemos calcular el flujo con (1):

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} [\ln x]_d^{d+a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \tag{2}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\Phi = 8.3 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wb}}$$

B. Calculamos la f.e.m. inducida utilizando la LEY DE FARADAY-LENZ, aplicando la REGLA DE LA CADENA:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}d} \cdot \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t},$$

teniendo en cuenta que:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}d} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{a}{d(d+a)}$$

y:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = v$$

[1] También se podría utilizar la LEY DE BIOT Y SAVART:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

La f.e.m. por tanto viene dada por la expresión:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{ab}{d(d+a)} \cdot v$$

Sustituyendo valores[2]:

$$\boxed{\mathcal{E} = 2.4 \times 10^{-7}\ \mathrm{V}}$$

[2] Recordemos que nos piden la f.e.m. en el instante en que $d = 20\,\mathrm{cm}$.

C. Ahora $I = I_0 \sin \omega t$, con $f = 50\,\mathrm{Hz}$ e $I_0 = 10\,\mathrm{A}$. Utilizando de nuevo la LEY DE FARADAY-LENZ y volviendo a aplicando la REGLA DE LA CADENA:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

con Φ dado por (2).

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I_0 \omega \cos \omega t,$$

con $\omega = 2\pi f$. La f.e.m. por tanto viene dada por la expresión:

$$\mathcal{E} = -\mu_0 I_0 f b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \cos(2\pi f t)$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = -2\pi \ln 2 \times 10^{-5} \cos(100\pi t)\ [\mathrm{V}]}$$