MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

1.° Bach

Rodrigo Alcaraz de la Osa

El **movimiento armónico simple** (MAS) es un tipo especial de **movimiento periódico** en el que la **fuerza restauradora** (elástica) sobre el objeto en movimiento es **directamente proporcional** a la magnitud del **desplazamiento** del objeto y actúa hacia su posición de equilibrio. El resultado es una **oscilación** que continúa indefinidamente salvo que sea inhibida por fricción o cualquier otra disipación de energía. Puede considerarse la **proyección unidimensional** del **movimiento circular uniforme** (MCU). EJEMPLOS: masa unida a un muelle, péndulo simple o el *yugo escocés*.

Magnitudes

Amplitud, A Máxima elongación (desplazamiento máx. de la posición de equilibrio). [m]

Periodo, T Tiempo empleado en completar una oscilación completa. [s]

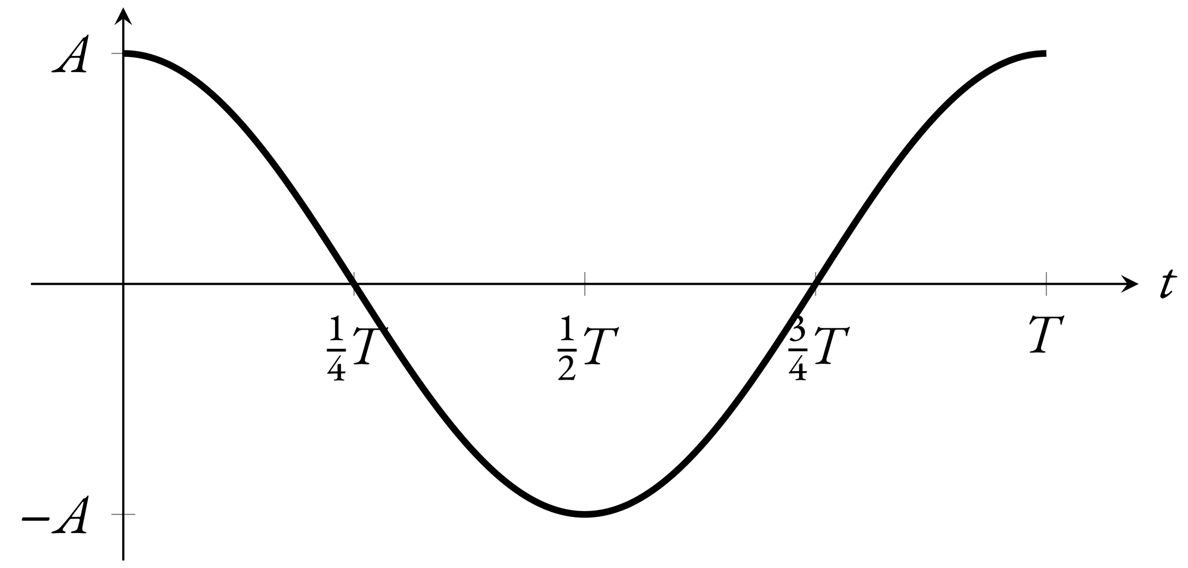
Frecuencia, f Número de oscilaciones por unidad de tiempo: $f = 1/T$. [Hz]

Frecuencia angular $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. [rad/s]

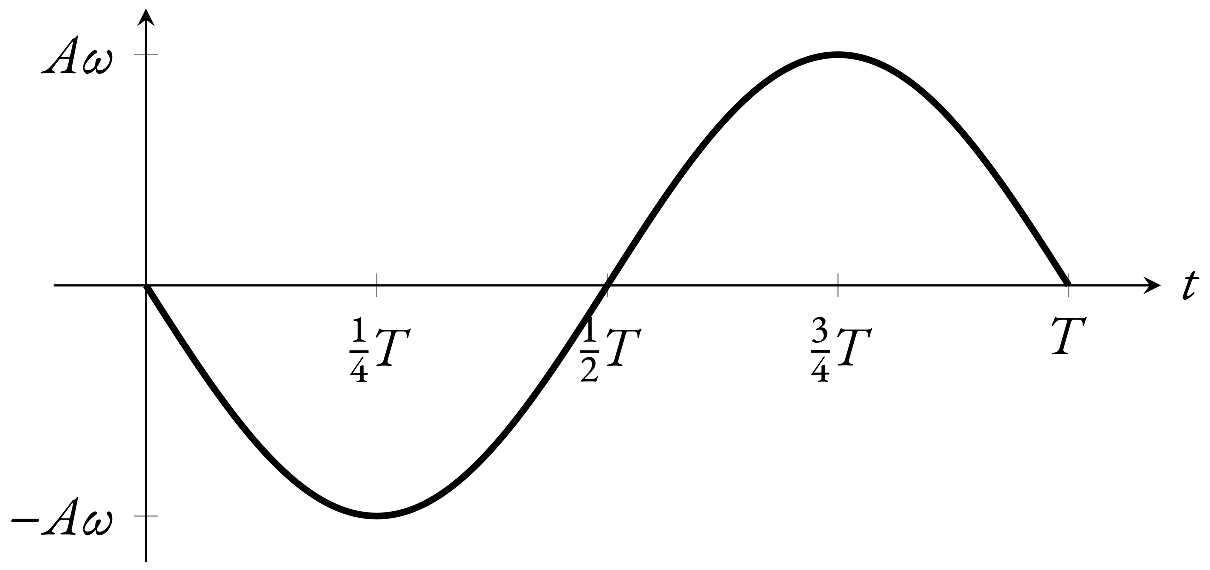
Fase inicial Indica el estado de oscilación/vibración inicial. Se denota por φ_0. [rad]

Ecuaciones

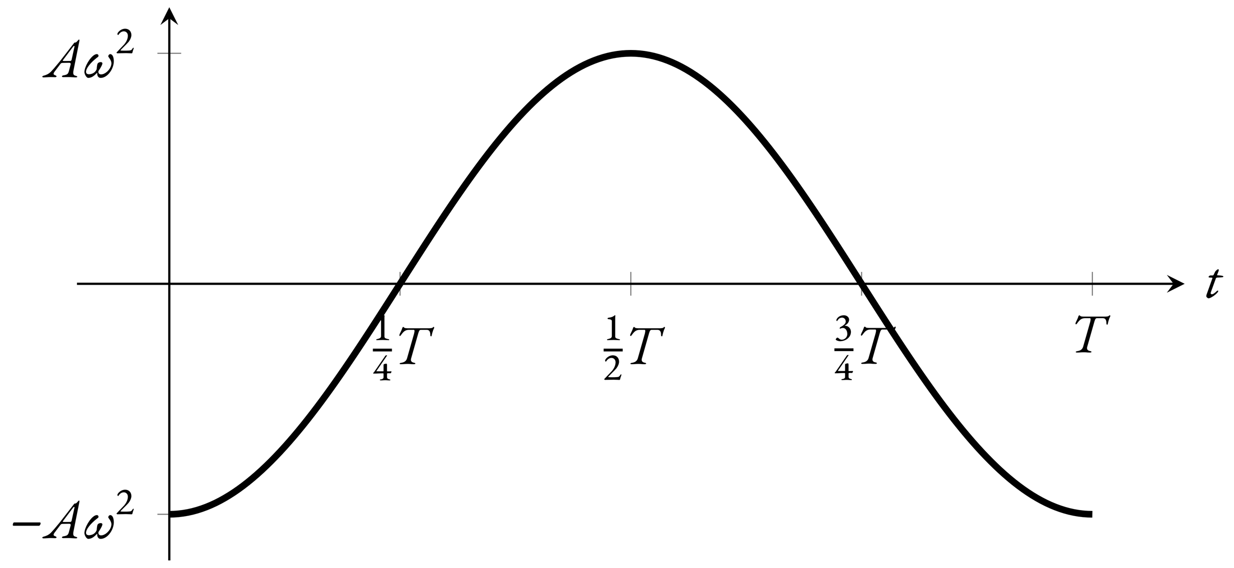
POSICIÓN: $x(t) = A\sin(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\text{fase } \varphi})$



VELOCIDAD: $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega\sqrt{A^2 - x^2(t)}$



ACELERACIÓN: $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$



Dinámica del MAS

Ley de Hooke

Aplicando la 2ª ley de Newton a una masa m unida a un extremo de un muelle (resorte) de constante elástica k (obviamos el carácter vectorial al ocurrir todo en una única dimensión):

$$F = ma$$

$$-kx = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

cuya solución puede escribirse de la forma:

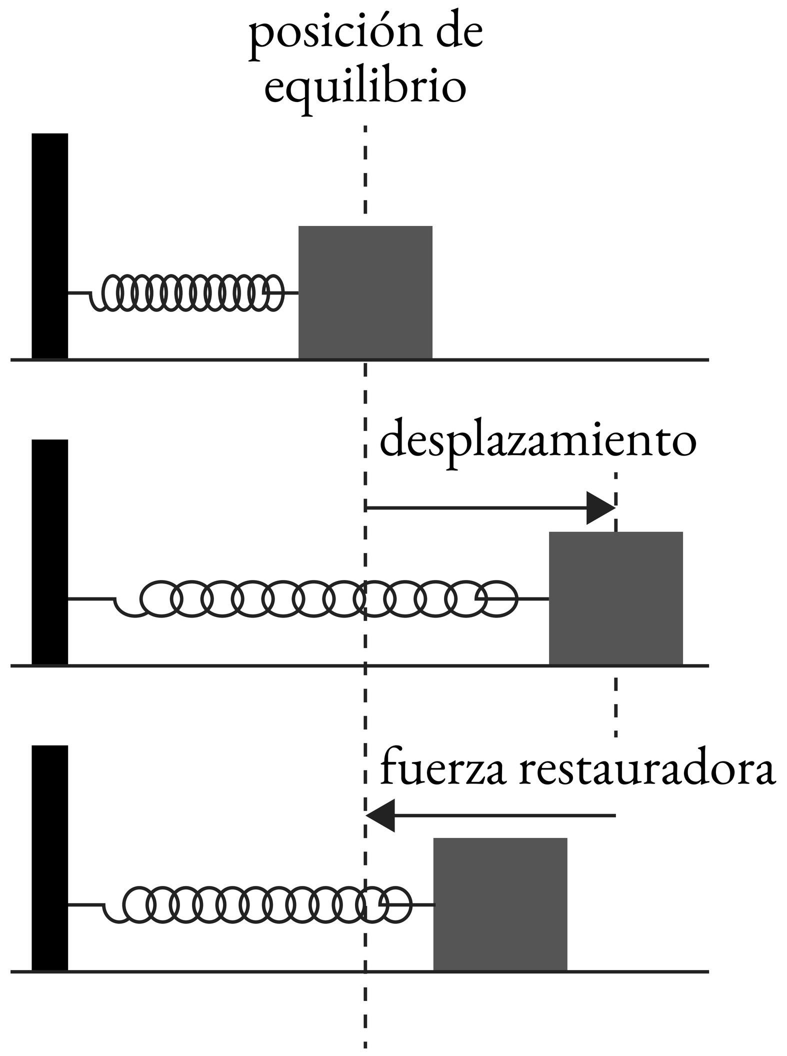
$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

es la frecuencia angular. El periodo, T, o la frecuencia, f, con la que oscila una masa m unida a un extremo de un resorte de constante elástica k pueden por tanto escribirse como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



Traducida y adaptada de `https://www.chegg.com/learn/physics/introduction-to-physics/harmonic-motion`.

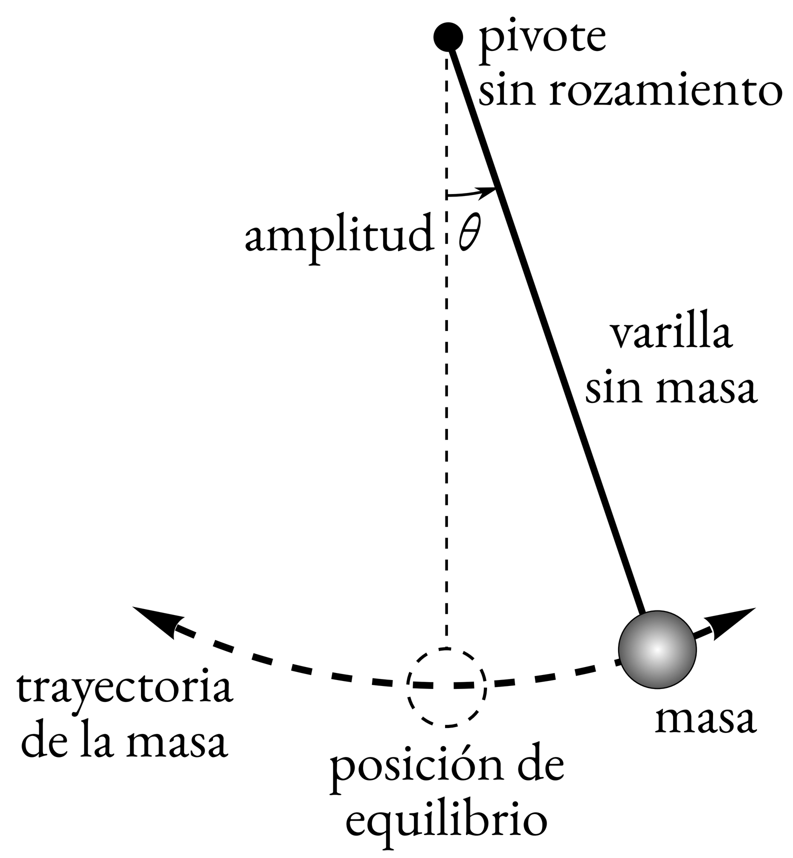
Péndulo simple

Consiste en una masa suspendida de un pivote de forma que puede oscilar libremente. En este caso la GRAVEDAD actúa como FUERZA RECUPERADORA, acelerando la masa hacia su posición de equilibrio, provocando la oscilación alrededor de ella.

La ECUACIÓN DIFERENCIAL que representa el movimiento de un PÉNDULO SIMPLE es:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- En la APROXIMACIÓN para ÁNGULOS PEQUEÑOS, el movimiento de un péndulo simple se aproxima por un MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE, mediante la ecuación diferencial:
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
- El tiempo que tarda la masa en completar una oscilación completa es el PERIODO, que únicamente depende de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad, a través de la expresión:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
- Fuera de la aproximación para ángulos pequeños, el periodo de un péndulo también depende ligeramente de la amplitud de la oscilación.



Traducida y adaptada de `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_gravity_pendulum.svg`.

Energía del MAS

Energía potencial elástica

Como la FUERZA ELÁSTICA es CONSERVATIVA, definimos la energía potencial asociada:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$$

Sustituyendo la expresión de la posición, $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Energía cinética

La energía cinética viene dada por la expresión:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad, $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Energía mecánica

En ausencia de rozamiento y otras pérdidas de energía, la energía mecánica total es constante:

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$